

Inżynierskie zastosowania statystyki – ćwiczenia

Temat 1: Zmienna losowa; gęstość i dystrybuanta zmiennej losowej

Zadania do rozwiązania:

- Na ćwiczeniach *Inżynierskie Zastosowania Statystyki* przeprowadzono kolokwium. Niech X oznacza ocenę (dla uproszczenia skala czterostopniowa 2.0, 3.0, 4.0, 5.0) losowo wybranego studenta. Załóżmy, że stosunek ocen ma się jak 1 : 3 : 4 : 2.
 - wyznacz dla zmiennej losowej X funkcję prawdopodobieństwa i naszkicuj wykres,
 - wyznacz dystrybuantę i naszkicuj jej wykres
 - oblicz prawdopodobieństwo $P(X < 3,5)$ korzystając
 - z funkcji prawdopodobieństwa,
 - z dystrybuanty (zaznaczając prawdopodobieństwo na rysunku),
 - analogicznie oblicz prawdopodobieństwo $P(3 \leq X < 4,5)$,
 - na wykresie dystrybuanty podaj interpretację prawdopodobieństwa $P(X=3)$.
 - dlaczego X możemy traktować jako zmienną losową?

- Dystrybuanta F zmiennej losowej X jest określona w następujący sposób:

x	$(-\infty, -2]$	$(-2, 3]$	$(3, 5]$	$(5, \infty]$
F(x)	0	0,4	0,5	1

Wyznacz funkcję prawdopodobieństwa tej zmiennej.

- Rozpatrujemy funkcję określoną wzorem $F(x) = A + B \arctan x$ dla $-\infty < x < \infty$. Dobierz stałe A i B tak, żeby funkcja $F(x)$ była dystrybuantą zmiennej losowej X . Wyznacz gęstość zmiennej losowej X .
- Funkcja niezawodności urządzenia oznacza prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy urządzenia w ciągu czasu t . Często przyjmuje się, że czas X bezawaryjnej pracy urządzenia jest zmienną losową ciągłą o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Zakładając, że parametr $\lambda = 10$:

- oblicz prawdopodobieństwo $P(5 \leq X \leq 10)$
 - wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej X
 - zinterpretuj obliczone prawdopodobieństwo przy pomocy wykresu gęstości i dystrybuanty (wystarczy szkic wykresu)
- Funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej X określona jest w tabeli

x_i	-2	-1	0	2	3	4
p_i	0,1	0,3	0,2	0,1	0,2	0,1

Wyznacz funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej U dla przypadków:

- $U = 0.25 X + 1$

b) $U = X^2$

6. Zmienna losowa X typu ciągłego ma dystrybuantę F . Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej $Y=-X$.
7. Funkcja zmiennej losowej typu skokowego zdefiniowana jest w tabeli

x_i	-2	2	4
p_i	0,5	0,3	0,2

Synonimy: wartość oczekiwana = wartość średnia = wartość przeciętna = nadzieja matematyczna

Wyznacz następujące wielkości:

- wartość przeciętną EX
- kwantyl $x_{0,3}$
- medianę $x_{0,5}$
- wariancję D^2X (wylicz ją za pomocą dwóch sposobów)
- odchylenie standardowe DX
- odchylenie przeciętne od wartości przeciętnej