Temat: Rozkład normalny, nierówność Czebyszewa, dwuwymiarowe i wielowymiarowe zmienne losowe

Zad. 0. Podać funkcję gęstości rozkładu normalnego.

Zad. 1. Czas (w minutach) między kolejnymi zgłoszeniami w pewnej centrali abonenckiej jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = 2$. Wyznacz:

a. średni czas pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami,
b. prawdopodobieństwo, że przed upływem 3 minut nastąpi zgłoszenie.

Zad. 2. Narysuj wykres funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu: jednomodalnego, wielomodalnego, antymodalnego, o asymetrii lewej, o asymetrii prawej, mającego przedział [a, b] median.

Zad.3. Prawdopodobieństwo nieprzekroczenia przez fabrykę dobowego limitu zużycia energii wynosi p=0,8. Niech K oznacza liczbę dni w ciągu tygodnia pracy (5-dniowego), w których nie nastąpiło przekroczenie limitu. Wyznacz:

c. funkcję prawdopodobieństwo zmiennej losowej K i jej histogram,
d. dystrybuantę i jej wykres,
e. prawdopodobieństwo, że co najmniej w trzech dniach limit nie zostanie przekroczony,
f. najbardziej prawdopodobną liczbę dni, w których limit nie zostanie przekroczony i prawdopodobieństwo takiej liczby dni,
g. wartość przeciętna i wariancję zmiennej losowej K,
h. współczynnik asymetrii rozkładu.

Zad. 4 Fabryka produkuje odważniki 10-gramowe. Błędy pomiarów masy odważników mają rozkład normalny o wartości przeciętnej μ=0 g oraz odchyleniu standardowym σ=0,01. Znajdź prawdopodobieństwo tego, że pomiar masy będzie przeprowadzony z błędem nie przekraczającym 0,02 g.

Zad. 5 Niech zmienna X ma rozkład normalny *N(μ,σ)*. Obliczyć $P(|X-\mu| < k\sigma)$ dla

a) k=1,96
b) k=2,58

Zad. 6 Niech zmienna losowa X ma rozkład normalny N(μ,σ). Wykazać, że $P(|X-\mu| \geq 3\sigma) < 0.01$.

Zad. 7. Niech X będzie zmienną losową o wariancji σ^2. Oszacować wyrażenie P(|X-EX|<3σ) oraz P(|X-EX| ≥ 3σ).

Zad. 8 Wykonujemy 80 rzutów kostką. Znaleźć przedział, w jaki z prawdopodobieństwem 0,9 wpada ilość otrzymanych szóstek.

Zad. 9 Stosując nierówność Czebyszewa obliczono, że prawdopodobieństwo, iż liczba orłów w serii rzutów symetryczną monetą będzie się różnić od swej wartości oczekiwanej o więcej niż 25% tej wartości oczekiwanej jest nie większe niż $\frac{1}{160}$. Z ilu co najmniej rzutów składała się ta seria?

Zad. 9 Rozważamy dwuwymiarową zmienną losową (X, Y) o rozkładzie określonym w tabeli:

	x_i		
y_k	**1**	**2**	**3**
2	0,2	0,2	0,1
4	0,1	0,3	0,1

a). Wyznacz dystrybuantę rozkładu brzegowego zmiennej losowej Y

b) Wyznacz dystrybuantę rozkładu brzegowego zmiennej losowej X
c) Kowariancję Cov(X,Y)

d) Wyznacz rozkład warunkowy zmiennej losowej Y pod warunkiem, że X = 2.
e) Znaleźć rozkład zmiennej Z=XY+2
f) Czy zmienne X i Y są niezależne

Zad. 10 Dla następującej funkcji:

$$f(x,y)=\begin{cases} cxy & \text{dla } 0\le x\le 2 \wedge 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{dla pozostalych przypadkow}\end{cases}$$

a)dobierz stałą c, aby funkcja *f(x,y)* była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y)
b)wyznacz i narysuj jej dystrybuantę
c) Oblicz prawdopodobieństwa P(X<2,Y<1), P(0,5<X≤1,0,5<y3), P(X<5,Y<5), P(X<-1,Y<-1), P(X>4,Y>4)

Zad. 11 Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład podany w tabelce

	x_i			
y_i	8	9	10	11
1,2	0,1	0,04	0	0
1,25	0,05	0,11	0,2	0
1,3	0	0,1	0,15	0,1
1,35	0	0	?	0,1

gdzie X jest wiekiem losowo wybranego dziecka, w pewnej grupie dzieci, Y zaś wzrostem w metrach. Obliczyć
a) P(X=10,Y=1,35)
b) Kowariancję Cov(*X*,*Y*)
c) współczynnik korelacji pomiędzy zmiennymi X i Y
d) Macierz kowariancji
e) Wyznacz rozkład warunkowy zmiennej losowej X pod warunkiem, że Y = 1,3.

Zad. 12 Gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y) jest

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x-y} & \text{dla} \quad x>0 \quad y>0 \\ 0 & \text{poza tym.}\end{cases}$$

a) Obliczyć P(1<X<2, 1<Y<2) , P(X>3 | Y<1), P(X>3).
b) Znaleźć dwuwymiarową dystrybuantę gęstości rozkładów brzegowych. Czy X i Y są niezależne? Znaleźć macierz kowariancji.

Wskazówki do zadań:

W zadaniach 4-6 wykorzystać fakt, że jeśli zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(\mu,\sigma)$, to standaryzowana zmienna losowa $\frac{X-\mu}{\sigma}$ ma rozkład $N(0,1)$ zwany standaryzowanym rozkładem normalnym. Potrzebne jest tablica z rozkładem normalnym (z książki do stat. lub https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_normal_table) . W zadaniach 7-9 wykorzystać nierówność Czebyszewa. W zadaniu 12. zauważyć, że $e^{-x-y}=e^{-x}\cdot e^{-y}$