

Inżynierskie zastosowania statystyki – ćwiczenia

Temat : Podstawowe własności estymatorów, estymacja punktowa

Zadania do rozwiązania:

1. W roku 1991 średnia cena złota wynosiła 400 \$ za uncję, a odchylenie standardowe 70 \$. W tabeli zebrane są dane o cenie złota za uncję w roku 1992. Ustal, który rok charakteryzował się większą dyspersją cen złota.

Miesiąc	Cena złota za uncję [\$]
Styczeń	225
Luty	225
Marzec	230
Kwiecień	236
Maj	270
Czerwiec	382
Lipiec	322
Sierpień	324
Wrzesień	320
Październik	310
Listopad	368
Grudzień	388

2. W trakcie badania stażu pracy pracowników w dwóch zakładach wchodzących w skład tego samego przedsiębiorstwa ustalono, że w I przedsiębiorstwie najliczniej byli reprezentowani pracownicy, których staż pracy wynosił 5,5 lat, połowa pracy osiągnęła staż mniejszy lub równy 6 lat, a połowa większy lub równy 6 lat. Średni staż pracy wynosił 6 lat. Współczynnik zmienności liczony na podstawie odchylenia standardowego wyniósł 30%. Dla II zakładu informacje o stażu pracy przedstawia tabela:

Staż pracy [lata]	Procent pracowników
2 - 4	10
4 - 6	20
6 - 8	25
8 - 10	35
10 - 12	10

Na podstawie tych danych dokonaj wszechstronnej analizy porównawczej obydwu zakładów ze względu na staż pracy pracowników. W ramach wszechstronnej analizy porównawczej zazwyczaj wyznacza się: wszystkie rodzaje średniej, przynajmniej jedną bezwzględną i względną miarę dyspersji oraz jeden współczynnik skośności (asymetrii). Zdecyduj, które współczynniki wyznaczyć na podstawie treści zadania.

UWAGA: Zad.2. zostanie rozwiązane, jeżeli wcześniej starczy czasu na pozostałe.

3. Próba prosta pobrana z populacji oznaczona jest jako X_1, \dots, X_n . Cecha X w populacji ma skończoną i różną od zera wariancję σ^2 . Zbadaj czy wariancja empiryczna postaci:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \text{ gdzie } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

jest estymatorem nieobciążonym nieznannej wariancji σ^2 . Czy estymator ten jest asymptotycznie nieobciążony? Jaki estymator nieobciążony wariancji σ^2 możesz zaproponować?

4. Rozpatrujemy populację, w której badana cecha ma rozkład Poissona zdefiniowany jako:

$$p(x; \lambda) = P(X=x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad (x \in N \cup \{0\}) .$$

Na podstawie n-elementowej próby prostej pobranej z tej populacji wyznacz metodą największej wiarygodności estymator parametru λ tego rozkładu.

5. Rozpatrywana jest populacja, w której badana cecha X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$. Wyznacz metodą największej wiarygodności estymatory parametrów μ, σ^2 tego rozkładu.

6. Badana cecha X pewnej populacji ma rozkład gamma z nieznanymi obu parametrami o gęstości:

$$f(x; p, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (p, \beta > 0),$$

Na podstawie n-elementowej próby prostej, pobranej z populacji, w której cecha X ma dany rozkład, wyznacz metodą momentów estymatory $\hat{p}, \hat{\beta}$ parametrów p, β .

7. Populacja generalna ma rozkład opisany przez funkcję gęstości:

$$f(x) = 2\lambda e^{-\lambda x^2} \quad \text{dla } x > 0, \lambda > 0$$

Wyznacz estymator parametru λ tego rozkładu.